



Gruppo di Ricerca per l'Applicazione della Statistica
ai Problemi Ambientali

Working paper -n. 8- Novembre 2000

**Disegno di uno schema di controllo
per un sistema *state-space* lineare:
un'applicazione di un algoritmo di approssimazione stocastica**

Giovanna Capizzi

Disegno di uno schema di controllo per un sistema *state-space* lineare:

un'applicazione di un algoritmo di approssimazione stocastica

Giovanna Capizzi
Università di Padova

Riassunto

Due statistiche test, una basata sul rapporto di verosimiglianza generalizzato, schema *GLR*, ed una basata su un test *GLR* limitato ad una finestra mobile, schema *WGLR*, vengono applicate alle innovazioni di un sistema *state-space* lineare, soggetto ad un cambiamento additivo. L'algoritmo di approssimazione stocastica di Robbins e Monro (1951) viene utilizzato per il disegno di ambedue questi schemi. Tale algoritmo consiste nella stima sequenziale delle soglie d'arresto dei due schemi, in modo tale che la media tra falsi allarmi risulti pari ad un valore fissato. Il procedimento iterativo di stima viene interrotto una volta soddisfatto un criterio basato sulla statistica F . Dal momento che lo schema *WGLR* impone un ritardo minimo, pari all'ampiezza della finestra mobile M , si considera anche uno schema *WGLR* modificato che tenga conto dei casi in cui il cambiamento si realizzi prima di M . Anche la soglia di questo schema viene determinata attraverso l'algoritmo di approssimazione stocastica. Le tre regole d'arresto vengono infine utilizzate per la verifica del corretto funzionamento di una centralina, per la rilevazione della concentrazione di ozono, nella città di Bologna.

1 Introduzione

Si consideri una successione di v.c. $\{Y_n\}$ per le quali si supponga che, in una situazione di controllo del processo generatore delle osservazioni, risulti $(y_1, \dots, y_n) \sim p_{0n}$ mentre nella situazione in cui il processo subisca un cambiamento, le $\{Y_n\}$ siano così distribuite

$$\begin{aligned} (y_1, \dots, y_n) &\sim p_{0n} && \text{if } n \leq n_0 \\ (y_1, \dots, y_n) &\sim p_{\theta n} && \text{if } n > n_0 \end{aligned}$$

Si assuma inoltre che le osservazioni non siano indipendenti e che sia il vettore dei parametri, θ , sia l'istante del cambiamento, n_0 , risultino incogniti.

Una opportuna statistica di controllo sotto tali ipotesi è quella basata sul rapporto di verosimiglianza generalizzato, che denoteremo con GLR

$$g_n = \max_{1 \leq j \leq n} \sup_{\theta \in \Theta} \sum_{i=j}^n \log \frac{p_\theta(Y_i | Y_1, \dots, Y_{i-1})}{p_0(Y_i | Y_1, \dots, Y_{i-1})} \quad (1)$$

L'efficienza di tale schema rispetto ad altri algoritmi di controllo può essere valutata in termini del valore atteso, sotto l'ipotesi in cui vi sia un cambiamento, della regola d'arresto

$$RL_\infty(h) = \inf \{n : g_n > h(\infty)\} \quad (2)$$

cioè in termini dell' *Average Run Length (ARL)* fuori controllo.

Il calcolo dell' *ARL* dello schema GLR comporta un elevato impiego di memoria. Tale schema infatti non può scriversi in modo recursivo, dovendo la massimizzazione rispetto a $\theta \in \Theta$, essere effettuata per ogni possibile istante di tempo j tra 1 e n . Al fine di ridurre la lentezza di tale calcolo, la massimizzazione rispetto a $\theta \in \Theta$, può essere ristretta ad ogni possibile istante temporale j all'interno di una "finestra mobile" di ampiezza M . Ne risulta la statistica di controllo, denotata con $WGLR$, data da

$$g_n(M) = \max_{n-M+1 \leq j \leq n} \sup_{\theta \in \Theta} \sum_{i=j}^n \log \frac{p_\theta(Y_i | Y_1, \dots, Y_{i-1})}{p_0(Y_i | Y_1, \dots, Y_{i-1})} \quad (3)$$

La cui regola d'arresto associata è

$$RL_M(h) = \inf \{n : g_n(M) > h(M)\} \quad (4)$$

Lo svantaggio di questo schema è quello di produrre un ritardo minimo nel lancio di un allarme, pari all'ampiezza della finestra mobile.

Il disegno degli schemi GLR e $WGLR$ consiste nella determinazione di un valore conveniente per le due soglie $h(s)$, $s = \infty, M$. Usualmente il criterio si basa sulla determinazione del valore ottimale di h che rende minima l' *ARL* fuori controllo $ARL(\theta, h)$, soggetta al vincolo che l' *ARL* in-controllo, $ARL(0, h)$, risulti uguale ad un valore fissato B .

Tale criterio non trova applicazione però in questo contesto. Infatti per entrambi gli schemi il calcolo esplicito dell' *ARL* non risulta analiticamente trattabile ed in più, nel caso dello schema $WGLR$, la scelta di h è condizionata da quella dell'ampiezza M .

Studi precedenti in letteratura forniscono risultati asintotici per $h(M)$, (Lai, 1995), oppure suggeriscono come calcolare un conveniente valore di h condizionatamente ad un valore fissato di M , (Bordignon e Scagliarini, 2000).

Come procedere ad una scelta congiunta di h ed M rimane allo stato attuale un problema aperto. In questo lavoro si propone di stimare sequenzialmente, per mezzo dell'approssimazione stocastica di Robbins e Monro (1951), quel valore della soglia h dei due schemi, GLR e $WGLR$, tale che la media tra falsi allarmi risulti pari ad un valore fissato. Il processo iterativo viene interrotto quando la stima risulta vicina al corrispondente vero valore, con elevata probabilità (Stroup e Braun, 1982, Capizzi e Masarotto, 1999).

In aggiunta, allo scopo di migliorare l' *ARL* fuori controllo dello schema $WGLR$ si propone

uno schema *WGLR* "modificato", denotato con *NWGLR*, che tiene conto dei casi in cui il cambiamento si realizzi prima di M . L'algoritmo di approssimazione stocastica sopra descritto viene applicato alla stima della corrispondente soglia.

Si osservi che una volta disegnati questi schemi, in modo da soddisfare un vincolo sull'*ARL* in-controllo, si può procedere alla scelta di quell'ampiezza M in grado di determinare l'andamento dell'*ARL* fuori controllo più desiderabile.

Nel paragrafo 2 viene descritto il caso in cui gli schemi *GLR*, *WGLR* e *NWGLR* vengano applicati alle innovazioni di un sistema *state-space* lineare soggetto ad un cambiamento additivo.

Nel paragrafo 3 viene proposto l'algoritmo di approssimazione stocastica per la stima della soglia dei tre schemi sopra citati.

Il procedimento viene dunque applicato ad un insieme di dati, discusso da (Bordignon e Scagliarini, 2000). Tale applicazione viene descritta nel paragrafo 4. Nel paragrafo 5 vengono forniti i principali risultati.

2 Cambiamenti additivi in sistemi lineari stocastici

Si assuma che la successione $\{Y_n\}$ possa essere modellata per mezzo di un modello *state-space* lineare invariante nel tempo

$$\begin{cases} X_{n+1} = FX_n + GU_n + W_n \\ Y_n = HX_n + JU_n + V_n \end{cases} \quad (5)$$

dove si è indicato con

X : il vettore dello stato	F : la matrice di transizione
Y : vettore delle osservazioni	H : matrice d'osservazione
U : la matrice delle variabili esogene	G, J : matrici di controllo
$\{W_n\} \sim N(0, Q)$	$\{V_n\} \sim N(0, R)$

Attraverso il filtro di Kalman la successione di osservazioni dipendenti $\{Y_n\}$ può essere trasformata in una successione gaussiana di "innovazioni", $\{\epsilon_n\}$, indipendenti.

Ipotizzato per lo stato iniziale che $X_0 \sim N(\mu_0, P_0)$, tale successione è data da

$$\begin{cases} \hat{X}_{n+1} = F\hat{X}_n + GU_n + FK_n\epsilon_n \\ \epsilon_n = Y_n - H\hat{X}_n - JU_n \end{cases}$$

dove si è indicato con K_n il guadagno di Kalman e con $\epsilon_n = Y_n - H\hat{X}_n - JU_n$ l'innovazione. Si consideri adesso l'ipotesi di un salto nel modello *state-space* (5), ovvero il modello dato da

$$\begin{cases} X_{n+1} = FX_n + GU_n + W_n \\ Y_n = HX_n + JU_n + V_n + \nu I_{n \geq n_0} \end{cases} \quad (6)$$

dove ν è uno scalare che corrisponde alla ampiezza incognita del cambiamento, mentre $I_{n \geq n_0}$ è una funzione indicatrice che assume valore uno per ogni istante temporale n

successivo all'istante n_0 in cui si ipotizza il cambiamento.

E' possibile dimostrare, (Basseville M. e Nikiforov I.V., 1993), che un salto nella media della distribuzione delle osservazioni $\{Y_n\}$ corrisponde ad un cambiamento con un profilo dinamico nella distribuzione delle innovazioni, ovvero

$$Y_n = HX_n + JU_n + V_n + \nu I_{n \geq n_0} \rightarrow \epsilon_n = \epsilon_n^0 + \nu \rho^*(n, n_0)$$

dove ϵ_n^0 indica l'innovazione sotto l'ipotesi che non vi sia alcun cambiamento, mentre l'espressione, nel caso *steady-state*

$$\rho^*(n, n_0) = I_{n \geq n_0} - \sum_{i=0}^{n-n_0-1} HF_{\star}^i F K I_{n-i-1 \geq n_0}$$

esprime l'effetto di un cambiamento che si verifica in $n_0 \leq n$.

Il problema di verifica d'ipotesi in termini di innovazione diviene ora

$$\begin{aligned} H_0 : \{ \epsilon_n \} &\sim N(0, \sigma^2) & n = 1, 2, \dots \\ H_1 : \{ \epsilon_n \} &\sim N(0, \sigma^2) & \text{if } n \leq n_0 \\ &\sim N(\nu \rho^*(n, n_0), \sigma^2) & \text{if } n > n_0 \end{aligned}$$

Nel caso in questione, la statistiche di controllo, (1) e (3) , diventano

$$g_n = \max_{r \leq j \leq n} \sup_{\nu} S_j^n \tag{7}$$

dove $r = 1$ per lo schema *GLR*, mentre $r = n - M + 1$ per quello *WGLR*.

Data la normalità delle innovazioni si ha

$$\sup_{\nu} S_j^n = \hat{\nu}_n(j) \left[\sum_{i=j}^n \rho^*(i, j) \sigma_i^{2-1} \epsilon_i \right] - \frac{\hat{\nu}_n(j)^2}{2} \left[\sum_{i=j}^n \rho^{*2}(i, j) \sigma_i^{2-1} \right]$$

ed essendo

$$\hat{\nu}_n(j) = \frac{\sum_{i=j}^n \rho^*(i, j) \sigma_i^{2-1} \epsilon_i}{\sum_{i=j}^n \rho^{*2}(i, j) \sigma_i^{2-1}}$$

la stima di massima verosimiglianza dell'ampiezza del cambiamento al tempo n , assumendo che il cambiamento sia avvenuto in j , la statistica di controllo (7) diventa

$$g_n = \max_{r \leq j \leq n} \frac{[\sum_{i=j}^n \rho^*(i, j) \sigma_i^{2-1} \epsilon_i]^2}{2 \sum_{i=j}^n \rho^{*2}(i, j) \sigma_i^{2-1}} \tag{8}$$

3 Stima delle soglie h

Si assuma che, sotto l'ipotesi che non vi sia alcun cambiamento, sia possibile simulare $\forall h$, le *Run Lengths* delle due statistiche di controllo date da (8)

$$RL_s[h_k(s)] = \inf\{n : \max_{r \leq j \leq n} \sup_{\nu} S_j^n > h_k(s), \quad r = 1, n - M + 1, k = 1, 2, \dots\} \quad (9)$$

ed ancora che $RL_s[h(s)] \sim F_{RL_s, h(s)}$, con $F_{RL_s, h(s)}$ incognita e $s = \infty, M$.

Come detto nell'introduzione, si suggerisce in questo articolo di simulare anche la *Run Length* di uno schema *WGLR* modificato, che abbiamo denotato con *NWGLR*. Tale schema si basa sulla seguente regola d'arresto

$$RL^\circ = \min(RL_\infty, RL_M) = \inf\{n : \max_{1 \leq j \leq M} \sup_{\nu} S_j^n > h \text{ oppure } \max_{n-M+1 \leq j \leq M} \sup_{\nu} S_j^n > h\} \quad (10)$$

Nell'ipotesi che il valore atteso $E[h(s)]$ esista, sia $h^*(s)$ l'unica radice dell'equazione

$$ARL[0, h(s)] - B = 0$$

con B un valore fissato per l'*ARL* in controllo.

Dato un valore iniziale della stima, che denotiamo con $h_1(s)$, e quello di una conveniente costante positiva A , la stima di $h^*(s)$ può essere aggiornata sequenzialmente per mezzo del processo di Robbins e Monro dato da

$$h_{k+1}(s) = h_k(s) - \frac{A}{k} \bar{n}_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

dove

$$\bar{n}_k = \frac{n_1[h_k(s)] + n_2[h_k(s)]}{2}$$

è la media di due osservazioni indipendenti ed identicamente distribuite, $n_1[h_k(s)]$, $n_2[h_k(s)]$, della v.c.

$$N[h_k(s)] = \frac{RL[h_k(s)] - B}{B}$$

In sostanza si procede alla simulazione, per uno stesso valore di $h_k(s)$, di due valori standardizzati della *Run Length*. Tali valori consentono di ricavare una stima corretta di $\sigma^2 = V\{RL(h^*(s))\}$, data da

$$s_k^2 = \frac{\sum_{i=1}^k e_i}{k}$$

dove si è indicato con

$$e_k = \{n_1[h_k(s)] - \bar{n}_k\}^2 + \{n_2[h_k(s)] - \bar{n}_k\}^2$$

Dunque si introduce, per il processo di stima recursiva (11), una regola d'arresto, (Stroup e Braun, 1982), basata sul tempo che trascorre sino al "primo passaggio" di una statistica F al di sotto di una soglia prefissata w

$$N_q = \inf \left\{ k \geq q : u_k(q) = \sum_{i=k-q+1}^k \frac{\bar{n}_k^2}{q s_k^2} < w, \quad k = q, q+1, \dots \right\} \quad (12)$$

con q un appropriato intero fissato.

La "regola di decisione" per $k = q, q + 1, \dots$ è dunque

$$\begin{cases} h_{k+1}(s) = h_k(s) - \frac{A}{k} \bar{n}_k & \text{if } u_k \geq w \\ \hat{h}^*(s) = h_k(s) & \text{if } u_k < w \end{cases}$$

E' possibile mostrare, (Capizzi e Masarotto, 1999), che mentre non è cruciale la scelta del valore di A , il valore dell'intero q dovrebbe essere scelto tra 100 e 500 in modo da avere un equilibrio soddisfacente tra le proprietà delle stime ed i tempi di calcolo. Infine, dal momento che $E[u_k] \rightarrow \frac{1}{2}$ quando $k \rightarrow \infty$, una volta scelto per q un valore elevato, occorrerebbe considerare valori della soglia w vicini a $E[u_k]$.

4 Un'applicazione al controllo della qualità dell'aria

Si consideri il caso studiato da Bordignon e Scagliarini (2000). Gli autori procedono all'adattamento del modello state-space (5) ad un insieme di osservazioni, rilevate nel periodo dal 9/7/1996 al 5/8/1996, nella città di Bologna. il *data set* è composto da 660 osservazioni delle

- medie orarie di ozono, $\{O_3\}$;
- concentrazioni orarie di diossido di nitrogeno, $\{NO_{2n}\}$;
- medie orarie della temperatura, $\{T_n\}$;

Il modello adattato a $\{Y_n\} = \log(O_3)$ è dato da

$$\begin{cases} Y_n = [0 \ 0 \ \dots \ \dots \ 1]X_n + V_n; \\ X_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0.0149 & 0 & 0 & \dots & -0.3662 & 1.1102 \end{bmatrix} X_n + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0.3037 & -0.0386 & 0.0636 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_n \\ N_n \\ N_{n-1} \end{bmatrix} + W_n \end{cases}$$

dove $\{N_n\} = \log(NO_{2n})$, $\{Z_n\} = \log(T_n)$ e

$$V_n \sim N(0, 0.0012), \quad W_n = [0, \dots, 0, e_n] \sim N(0, Q)$$

con

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.0185 \end{bmatrix}$$

e $\hat{V}[\epsilon]=0.0212$.

Dal momento che per ottenere anche una sola realizzazione delle *Run Lengths*, (9) o (10), può essere necessario simulare un numero molto elevato di osservazioni $\{Y_n\}$, in questo lavoro occorre provvedere anche all'adattamento di un conveniente modello di serie storiche alle successioni di dati $\{Z_n\}$ e $\{N_n\}$.

Modelli soddisfacenti per le variabili di input sono risultati i modelli $SARMA(s)$, la cui stagionalità $s=24$, consente di tener conto dei movimenti orari sistematici.

In particolare il modello $SARMA(24)$, per $\{N_n\}$, è dato da

$$(1 - \phi_1 B)(1 - \phi_1^{(24)} B^{24})N_n = (1 + \theta_1 B)(1 + \theta_1^{(24)} B^{24})\epsilon_n^N \quad (13)$$

mentre il modello $SARMA(24)$ per $\{Z_n\}$ è dato da

$$(1 - \phi_1 B)(1 - \phi_1^{(24)} B^{24})Z_n = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2)(1 + \theta_1^{(24)} B^{24})\epsilon_n^Z \quad (14)$$

dove

- B è l'operatore ritardo;
- ϕ_1, θ_1 , e θ_2 sono rispettivamente i termini $AR(1)$, $MA(1)$ e $MA(2)$;
- $\phi_1^{(24)}$ e $\theta_1^{(24)}$ sono rispettivamente i termini autoregressivi e a media mobile, stagionali, a ritardo 1;
- $\epsilon_n^Z \sim N(0, 0.0011)$ e $\epsilon_n^N \sim N(0, 0.1181)$.

Le stime di tali parametri e i relativi *standard error* sono riportati nella Tab.1.

Tab. 1 Stime dei parametri					
Modello (13)			Modello (14)		
Parametri	Stime	s.q.m.	Parametri	Stime	s.q.m.
c	3.6059	0.1739	c	3.1749	0.1190
ϕ_1	0.8070	0.0246	ϕ_1	0.9001	0.0187
θ_1	0.1060	0.0267	θ_1	0.3187	0.0409
$\phi_1^{(24)}$	0.8254	0.0204	θ_2	0.1101	0.0406
$\theta_1^{(24)}$	-0.7006	0.0002	$\phi_1^{(24)}$	0.9594	0.0082
			$\theta_1^{(24)}$	-0.7846	0.0001

Ipotizzato che $X_{-100} = [0, 0, \dots, 0]$ e $\hat{X}_{0|0} = [0, 0, \dots, 0]$ vengono simulate sotto l'ipotesi nulla le osservazioni $\{Y_n\}$ e le innovazioni $\{\epsilon_n\}$ secondo il modello

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_n = HX_n + V_n, \quad n = -100, -99, \dots \\ (1 - \phi_1 B)(1 - \phi_1^{(24)} B^{24})Z_n = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2)(1 + \theta_1^{(24)} B^{24})\epsilon_n^Z \\ (1 - \phi_1 B)(1 - \phi_1^{(24)} B^{24})N_n = (1 + \theta_1 B)(1 + \theta_1^{(24)} B^{24})\epsilon_n^N \\ X_{n+1} = FX_n + G \begin{bmatrix} Z_n \\ N_n \\ N_{n-1} \end{bmatrix} U_n + W_n, \\ \hat{X}_{n+1} = F\hat{X}_n + GU_n + FK_n\epsilon_n, \quad n = 0, 1, \dots \\ \epsilon_n = -H\hat{X}_n + Y_n \end{array} \right.$$

5 Risultati

Fissati alcuni valori di B, h_1, A, q, w, M , secondo lo schema riportato nella Tab. 2, il procedimento iterativo, (11), viene applicato per la stime delle soglie delle regole d'arresto (9) e (10).

	<i>GLR</i>	<i>WGLR</i>	<i>NWGLR</i>
B	250	250	250
h_1	1	1	1
A	1.5	1.5	1.5
q	200	200	200
w	0.5	0.5	0.5
M	∞	4,12,24,48	4,12,24,48

Il procedimento di stima della soglia h^* , per ciascuno dei tre schemi, viene iterato solo 50 volte, data la variabilità molto ridotta delle stime \hat{h}^* , (Capizzi e Masarotto, 1999). I corrispondenti risultati medi sono riportati nella Tabella 3.

Tab. 3 Risultati			
<i>GLR</i>			
M	h^*	s.e.	\bar{k}
∞	5.657	0.0498	388.50
<i>WGLR</i>			
M	h^*	s.e.	\bar{k}
48	5.247	0.0422	514.45
24	5.295	0.0518	399.71
12	5.164	0.0594	343.49
4	4.686	0.0404	318.66
<i>NWGLR</i>			
M	h^*	s.e.	\bar{k}
48	5.575	0.0510	532.25
24	5.536	0.0466	367.00
12	5.273	0.0473	314.50
4	4.738	0.0395	297.24

Si osservi come, al variare di M , le soglie dello schema *NWGLR* risultino tutte più grandi di quelle relative allo schema *WGLR*. In più, all'aumentare di M , le soglie stimate per lo schema *NWGLR* tendono si avvicinano maggiormente al valore della soglia stimata per il *GLR*.

6 Conclusioni

In questo articolo si discute il disegno di un algoritmo di controllo sotto l'ipotesi che, avvenuto un cambiamento nella media delle osservazioni, risulti incognita sia l'ampiezza che l'istante del cambiamento.

In tale situazione si ricorre ad una statistica di controllo, indicata con *GLR*, basata sul rapporto di verosimiglianza generalizzato. Dal momento che il calcolo dell'*ARL* in controllo per tale schema richiede un consistente impiego di memoria, in letteratura viene proposta una statistica *GLR*, per la quale il massimo della verosimiglianza delle innovazioni, rispetto all'ampiezza del cambiamento, viene ricercato all'interno di una finestra mobile di ampiezza M . Questa statistica, che abbiamo denotato con *WGLR*, pur migliorando sensibilmente i tempi di calcolo dell'*ARL* in controllo, segnala un allarme con un ritardo minimo non inferiore all'ampiezza della finestra mobile, determinando un comportamento insoddisfacente dell'*ARL* fuori controllo, per grandi cambiamenti nella media. Per migliorare tale *performance* si può introdurre una regola d'arresto data dall'unione delle regole d'arresto associate allo schema *GLR* e a quello *WGLR*. Lo schema proposto, denotato con *NWGLR*, ha lo scopo di migliorare la reattività dello schema *WGLR* ai grandi cambiamenti nella media delle osservazioni.

Il lavoro propone una procedura automatica per il disegno dei tre schemi sopra citati. Tale procedura basata su un algoritmo di approssimazione stocastica, associato ad una

conveniente regola d'arresto, consente di determinare un valore della soglia h che soddisfa un vincolo sul tempo medio tra falsi allarmi.

Bibliografia

- BASSEVILLE M. e NIKIFOROV I.V. (1993), "Detection of abrupt changes: theory and applications", Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- BORDIGNON S. e SCAGLIARINI M. (2000), "Monitoring algorithms for detecting changes in the ozone concentrations", *Environmetrics*, **11**, pp.125-137.
- CAPIZZI G. e MASAROTTO G. (1999), "Calibrazione di una carta di controllo mediante approssimazione stocastica", Atti della XXXIX Riunione Scientifica della Società Italiana di Statistica, Sorrento 14-17 Aprile 1998, in *Supplemento alla Rivista di Scritti di Statistica Economica*, pp. 809-815.
- HARVEY A.C. (1989), "Forecasting, structural time series and the Kalman filter". Cambridge: Cambridge University press.
- LAI T. L. (1995), "Sequential change point detection in quality control and dynamic systems", *J.R. Statistical Society B*, **57**, pp. 613-658.
- ROBBINS H. e MONRO S. (1951), "A Stochastic Approximation Method", *The Annals of Mathematical Statistics*, **22**, pp. 400-407.
- STROUP D.F. e BRAUN H.I. (1982), "On a New Stopping Rule for Stochastic Approximation", *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **60**, pp. 535-554.
- STROUP D.F. e BRAUN H.I. (1984), "Correction to 'On a New Stopping Rule for Stochastic Approximation'", *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **67**, p. 237.